ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ

ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Άσκηση 1 (Προτάθηκε από "pito")

Για ένα φάρμακο σε πειραματικό στάδιο αποδείχθηκε ότι δημιουργεί δύο ειδών παρενέργειες. Η πιθανότητα να δημιουργήσει πρόβλημα στην όραση του ασθενούς είναι μικρότερη του 0,07 , η πιθανότητα να δημιουργήσει δυσλειτουργία στο γαστρεντερικό είναι 0,05 και τέλος η πιθανότητα να εμφανιστούν παρενέργειες και στην όραση και στο γαστρεντερικό είναι 0,02.
Το φάρμακο επιτρέπεται να κυκλοφορήσει , αν η πιθανότητα να μην δημιουργήσει παρενέργειες είναι μεγαλύτερη του 0,9. Να εξετάσετε αν το φάρμακο θα κυκλοφορήσει.

Πηγή: Θοδωρής Ανδριόπουλος, εκδόσεις Σαββάλας

Άσκηση 2 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Δύο φίλοι θα παίξουν τάβλι και αποφασίζουν νικητής να είναι εκείνος που θα κερδίσει τρεις συνολικά παρτίδες ή δύο συνεχόμενες παρτίδες.

Αν με α, b συμβολίσουμε τα ενδεχόμενα νίκης του 1ου και του 2ου αντίστοιχα σε μία παρτίδα,

α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος

β) Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα:

A: «Νικητής είναι ο 1ος»,
B: «Ο 2ος κερδίζει την 3η παρτίδα» και
C: «Ο 1ος δε χάνει καμία παρτίδα».

γ) Να βρείτε τα ενδεχόμενα $D = A \cap C,\ E = B \cup C',\ Z = A \cap B$.

δ) Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα:
K: «Ο 1ος είναι νικητής και ο 2ος κερδίζει την 3η παρτίδα» ,
L: «Ο 2ος είναι νικητής και ο 1ος χάνει την 1η παρτίδα»

ε) Αν θεωρήσουμε ότι ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα, να βρεθούν οι πιθανότητες P(A), P(B), P(K), P(L).

Άσκηση 3 (Προτάθηκε από "pito")

Σε ένα τουρνουά μπάσκετ παίρνουν μέρος 25 ομάδες. Το 80% των ομάδων προκρίνεται στον ημιτελικό γύρο και το 40% από αυτές που προκρίνονται συμμετέχουν στον τελικό. Αν διαλέξουμε μια ομάδα στην τύχη (για τις επιδόσεις των ομάδων δεν γνωρίζουμε τίποτα), τότε:

α) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α:"Η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό ή στον τελικο".

Β:" Η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό, αλλά όχι στον τελικό".

Γ: "Η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον τελικό".

Δ: " Η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον ημιτελικό ή παίζει στον τελικό"

β) Σε ποιο από τα παραπάνω ενδεχόμενα μας συμφέρει να στοιχηματίσουμε;

Πηγή: Θοδωρής Ανδριόπουλος, εκδόσεις Σαββάλας

Άσκηση 4 (Προτάθηκε από Χρήστο Τσιφάκη)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{ax^3}{3}-\beta x+2,\ a,\beta\in R$ να παίρνουν τιμές από το σύνολο $S=\{1,2,3,4\}$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α = {η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα των x'x γωνία $\omega=\frac{3\pi}{4}$}

Β= {η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Μ$\left(-\frac{2}{3},2\right)$}

Γ= {πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α, Β}

iii) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β πραγματοποιούνται συγχρόνως, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Άσκηση 5 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-2x,\ x\in R$ και έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

2. Αν $A\subseteq B$ να αποδείξετε ότι $2P(A)+\eta\mu P(B)\le 2P(B)+\eta\mu P(A)$.

3. Αν $P(A)=\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι: $2f\left(P(A\cap B)\right)\ge\sqrt{2}-\pi$

4. Να αποδείξετε ότι: $f\left(P(A-B)\right)\le 0$.

Άσκηση 6 (Προτάθηκε από "pito")

Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω ={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω ισχύει ότι:

$$P(k)=ak,\ k\in[1,5],\ P(k)=\frac{1}{10},\ k\in[6,10]$$

α) Να δείξετε ότι $a=\frac{1}{30}$.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

i) A= $k\in\Omega/$η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+k^2x^2-6kx+5$ στο σημείο της $M(1,f(1))$ τέμνει τον xx' στο σημείο με τετμημένη 2.

ii) B={ $k\in\Omega/\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-(k+2)x+2k}{\sqrt{x+2}-2}=k^2-11k+18$}

iii) Γ={$k\in\Omega/$η μέση τιμή των αριθμών $k,\ 2-4k,\ 5-3k,\ k^2-6k,\ k+1$ να είναι μικρότερη ή ίση του -4\}

Πηγή : Παπαδάκης Βασίλης, εκδόσεις Σαββάλας

Άσκηση 7 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Σε ένα αεροπορικό ταξίδι, το 20% των επιβατών είναι άντρες που δεν έχουν ξανάταξιδέψει με αεροπλάνο. Το 30% των επιβατών είναι γυναίκες που έχουν ξαναταξιδέψει και η πιθανότητα κάποιος επιβάτης να είναι άντρας ή να έχει ξαναταξιδέψει είναι 90%.

Αν επιλέξουμε τυχαία έναν επιβάτη, να βρείτε την πιθανότητα:

i. Να είναι άντρας
ii. Να έχει ξαναταξιδέψει
iii. Να είναι άντρας και να έχει ξαναταξιδέψει
iv. Να είναι γυναίκα και να μην έχει ξαναταξιδέψει.

Άσκηση 8 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Στις πανελλήνιες εξετάσεις το 70% των μαθητών από το νομό Ευβοίας έγραψε καλά στη Βιολογία γενικής παιδείας ή στα μαθηματικά γενικής παιδείας και το 20% έγραψε καλά και στα δύο μαθήματα.

α. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στο ένα μόνο μάθημα.
Β. Αν το 40% έγραψε καλά στη Βιολογία, τότε:
i. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψε καλά στα μαθηματικά και όχι στη Βιολογία.
ii. Αν οι μαθητές που έγραψαν καλά στη Βιολογία και όχι στα μαθηματικά είναι 600, να βρείτε πόσοι μαθητές από το νομό Ευβοίας έλαβαν μέρος στις εξετάσεις.

Πηγή: Ν.Σκόμπρης (εκδόσεις Σαββάλας)

Άσκηση 9 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη)

Έστω Ω = {0,1,2,3,4} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.

Η πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου {λ} με $\lambda \in \Omega$, δίνεται από τη σχέση $P(\lambda) = a\lambda + \beta$.

Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \lambda x^2 + 4x + 2012$ και το ενδεχόμενο Α του Ω όπου $A = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \Omega /\ \eta\ \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\ \sigma\varepsilon\ o\pi o\iota o\delta\acute{\eta}\pi o\tau\varepsilon\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ \tau\eta\varsigma\ C_f, \\ \delta\varepsilon\nu\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda\lambda\eta\lambda\eta\ \sigma\tau o\nu\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\ x'x \end{array} \right\}$ με $P(A) = \frac{1}{4}$.

α) Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β.

β) Έστω το ενδεχόμενο:

$$B=\left\{\begin{array}{l}\kappa\in\Omega /\ \eta\ \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma\ \tau\omega\nu\ \pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\nu\ \ 0,1,\kappa,2\kappa,\kappa+1\\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\ \alpha\pi\acute{o}\ \tau\eta\ \mu\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \tau o\upsilon\varsigma\end{array}\right\}.$$

i. Να βρεθούν τα στοιχεία του Β.

ii. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A\cup B',\ \kappa\alpha\iota\ A-B$.

Άσκηση 10 (Προτάθηκε από Απόστολο Τιντινίδη)

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$. Αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι οι:

$$P(A),\ P(B),\ P(A\text{-}B),\ P(B\text{-}A),\ P(\Omega), P(\varnothing)$$

και έχουν διάμεσο $\delta=\frac{1}{4}$, τότε:

α) να βρείτε την πιθανότητα P(B)

β) να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων

γ) Αν P(B-A)=$\frac{1}{4}$, τότε να δείξετε ότι P(A)=$\frac{1}{4}$ και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Άσκηση 11 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x,\ x\in R$ και έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

α. Να εξετάσετε την *f* ως προς τη μονοτονία.

β. Αν $A\subseteq B$ να αποδείξετε ότι $P(B)+e^{P(A)}\le P(A)+e^{P(B)}$.

γ. Αν $P(A)=\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι:

i) $1+2f\left(P(A-B)\right)\le 2\sqrt{e}$

ii) $f\left(P(A\cap B)\right)\le e-1$.

Άσκηση 12 (Προτάθηκε από Χρήστο Κανάβη)

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

Α) Να δείξετε ότι $P(A'\cup B')\geq P((A-B)\cup(B-A))$

Β) Αν $P(B'-A)=0,2$ $P(B')=0,7$ και $P((A-B)\cup(B-A))=0,7$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(A\cap B)$

Άσκηση 13 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι:

Α) $P(A\cup B)\geq \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

Β) $P(A\cap B)\geq P(B)-P(A')$

Γ) $P(A)+P(B)\leq 1+P(A\cup B)$

Δ) $P(A\cap B)+P(A\cup B)<P(A)+P(B)+1$

Πηγή: Τουμάσης – Τσαπακίδης (Εκδόσεις Σαββάλας)

Άσκηση 14 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Έστω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης Ω={1,2,…,k} με $k\in N^*$. Το δείγμα των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω έχει μέση τιμή $\bar{x}=3,5$, ενώ ισχύει $P(1)=\dfrac{P(2)}{2}=....=\dfrac{P(k)}{k}$.

α. Να βρεθεί η τιμή του k.

β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

γ. Θεωρούμε το δείγμα α,2α,3α με $a\in\Omega$. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: "Η τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος είναι μεγαλύτερη του $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$"

Άσκηση 15 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Αν A,A' είναι δύο αντίθετα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω να δείξετε ότι:

α. $(P(A))^2+(P(A'))^2\geq\dfrac{1}{2}$ β. $P(A)\cdot P(A')\leq\dfrac{1}{4}$ γ. $P(A)\cdot(P(A'))^2\leq\dfrac{4}{27}$

δ. $P(A')\cdot(P(A))^2\leq\dfrac{4}{27}$ ε. $\dfrac{1}{P(A)}+\dfrac{1}{P(A')}\geq 4$ στ. $\dfrac{1}{(P(A))^2}+\dfrac{1}{(P(A'))^2}\geq 8$

ζ. $(P(A))^3+(P(A'))^3\geq\dfrac{1}{4}$

Πηγή: Τουμάσης – Τσαπακίδης (Εκδόσεις Σαββάλας)

Άσκηση 16 **(Προτάθηκε από "pito").**

Σαν συνέχεια των ανισοτικών σχέσεων του Δημήτρη:
Έστω Α, Β μη κενά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε το Α να μην είναι υποσύνολο του Β.

Να δείξετε ότι :

α) $\left[P(A)\right]^{P(A-B)} \geq \left[P(A-B)\right]^{P(A)}$ β) $\left[P(A)\right]^{e} \leq e^{P(A)}$

Άσκηση 17 **(Προτάθηκε από Απόστολο Τιντινίδη)**

Σε μια πόλη το 85% των κατοίκων έχει αυτοκίνητο και το 35% έχει μοτοσυκλέτα. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν κάτοικο να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της πιθανότητας ο κάτοικος:

α) να έχει αυτοκίνητο και μοτοσυκλέτα.

β) να έχει αυτοκίνητο ή μοτοσυκλέτα.

γ) να έχει μόνο αυτοκίνητο.

δ) να έχει μόνο αυτοκίνητο ή μόνο μοτοσυκλέτα.

ε) να μην έχει ούτε αυτοκίνητο ούτε μοτοσυκλέτα.

Άσκηση 18 **(Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)**

Έστω $A, B \neq \varnothing$ δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με $0 < P(A \cup B) < 1$.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2P(A \cup B)x^2 + P(A \cup B)x + 2,\ \ x \in R$ και

$g(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 2007,\ \ x \in R$

Α. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$

Γ. Αν η παραπάνω εφαπτομένη σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 4 τ.μ, τότε να αποδείξετε ότι $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Δ. Αν η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0 = P(A - B)$, να βρείτε την πιθανότητα P(B).

Πηγή: Μ. Αγιοπούλου - Ν. Πανουσάκης (εκδοτικός όμιλος συγγραφέων καθηγητών)

Άσκηση 19 (Προτάθηκε από Δημήτρη)

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω που αποτελείται από 2004 στοιχεία, τα οποία είναι ισοπίθανα. Θεωρούμε τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' του Ω με 0<P(A)<1.

(α) Να αποδείξετε ότι $4\frac{P(A)}{P(A')}+\frac{1}{P(A)}\geq 5$

(β) Αν στην παραπάνω σχέση ισχύει η ισότητα τότε:

(1) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του A.

(2) Αν κάποιο ενδεχόμενο B του Ω έχει 1453 στοιχεία, να αποδείξετε ότι τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

Πηγή: (Στεργίου- Νάκης, εκδόσεις Σαββάλα)

Άσκηση 20 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη)

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω ο οποίος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα πεπερασμένου πλήθους και δύο ενδεχόμενα του A και B για τα οποία ισχύει $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$.

Δίνεται επίσης και η συνάρτηση $f(x)=x^3+3N(A)x^2+N(A)\cdot N(\Omega)x+8$ με $x\in R$ και N(A), N(Ω) το πλήθος των στοιχείων του A και του Ω αντίστοιχα.

Αν η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, τότε:

α) Να δείξετε ότι $A\neq\varnothing$.

β) Να βρείτε την πιθανότητα P(A).

γ) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο M(-1,1) τότε:

i. Να βρείτε το N(Ω).

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{f'(x)}$

Πηγή: Γιώργος Μαυρίδης

Άσκηση 21 (Προτάθηκε από Παναγιώτη Γκριμπαβιώτη)

Έστω Ω={1,2,3,…,n} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α, Β δυο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε: $N(A\cup B)=5,\ P(A-B)=\frac{1}{10},\ P(A\cap B)=\frac{1}{20}$

i) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.

ii) Να αποδείξετε ότι: $P(B)=\frac{5}{n}-\frac{1}{10}$

iii) Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Α είναι ίση με $\frac{1}{10}$, να βρείτε το n.

iv) Αν n=20 και $\bar{x},s$ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αριθμών 1, 2, 3, α, 4-α όπου $a\in\Omega$, τότε να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: $\Gamma=\{a\in\Omega/s>\bar{x}\}$

Άσκηση 22 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x,\ x>0$ και Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

i) Να εξετάσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία

ii) Αν $A\neq\varnothing$ και $A\subseteq B$, να αποδείξετε ότι $\ln\frac{P(A)}{P(B)}\leq P(A)-P(B)$

iii) Αν η εφαπτομένη στην καμπύλη της f στο σημείο $x_0=P(A)$ είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας των θετικών ημιαξόνων, τότε:

α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A)$

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(P(A\cap B)\right)\leq-\frac{\ln 4e}{2}$, για $A\cap B\neq\varnothing$

Άσκηση 23 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενος δειγματικού χώρου Ω με $P(A\cup B)=\frac{7}{8}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$.

α. Να δείξετε ότι P(A) + P(B) = 1

β. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α,Β

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{P(A)x^2-x+P(B)}{x-1}, & x\neq 1 \\ -4P(A-B), & x=1 \end{cases}$.

γ. i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(B).

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Γ: Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα Α,Β
Δ: Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β
γ.ii. Να εξετάσετε αν το δείγμα των $P(\Gamma), P(\Delta), P(A'\cup B), P(B'-A')$ είναι ομοιογενές.

Πηγή: Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Άσκηση 24 **(Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)**

Ένα κουτί περιέχει 5 κίτρινες, x πράσινες και y γαλάζιες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα από το κουτί. Αν η πιθανότητα να πάρουμε πράσινη ή γαλάζια μπάλα είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή γαλάζια είναι $\frac{3}{5}$, τότε:

α) Να βρείτε τα x , y καθώς επίσης και πόσες μπάλες έχει το κουτί.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρουμε κίτρινη ή πράσινη μπάλα

Πηγή: από φυλλάδιο Δ Αργυράκη & Γ Κουτσανδρέα

Άσκηση 25 **(Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)**

Αν Α , Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , με $P(A)=\frac{1}{5}, P(B)=\frac{2}{3}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$, να βρείτε την πιθανότητα:

α) Να μην πραγματοποιηθεί το Α .

β) Να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α , Β .

γ) Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α , Β .

δ) Να πραγματοποιηθεί μόνο το Α .

ε) Να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα Α , Β .

στ) Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α , Β
Πηγή: από φυλλάδιο Δ Αργυράκη & Γ Κουτσανδρέα

Άσκηση 26 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

1) Αν Α, Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=k^2$, $P(B)=5k^2-7k+3$, να δείξετε ότι $\frac{1}{2}\le k\le\frac{2}{3}$.

2) Αν Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω με $|2P(A)+3|-|2P(A)-5|=p$, να αποδείξετε ότι ισχύει $|p|\le 2$.

3) Αν Α, Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)>\frac{1}{9}$, $P(B)=\frac{4P(A)}{9P(A)-1}$, να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B).

Άσκηση 27 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Έστω $\Omega=\{0,1,2,\omega_1,\omega_2\}$ με $\omega_1<\omega_2$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο $A=\{\omega_1,\omega_2\}$, ώστε να ισχύουν: $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(0)=2P(1)=\frac{P(2)}{2}=P(\omega_1)$

A. Να βρείτε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω

B. Αν η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\frac{a}{3}x^3-4x^2+15x-1$ έχει εφαπτομένη στο $x_0=1$ παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=8x$ και τα ω_1, ω_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f, τότε:

i) Να βρείτε τα α, ω_1, ω_2

ii) Για $\alpha=1$, $\omega_1=3$, $\omega_2=5$

α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B=\left\{\lambda\in\Omega:\lim\limits_{x\to 2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lambda^2-5\lambda+\frac{26}{3}\right\}$

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ: δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β

γ) Να δείξετε ότι $P(A-B)\le\frac{1}{2}$

Άσκηση 28 (Προτάθηκε από Γιάννη Ευσταθίου)

A) Έστω Ω δειγματικός χώρος που αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης $(x-10)(x-11)\cdot\ldots\cdot(x-20)=0$. Αν Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $\lambda\in\Omega$, να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση $y^2-8y+\lambda=0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 29 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη)

Μια ομάδα μαθητών αποτελείται από μ αγόρια και ν κορίτσια. Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους μαθητές της ομάδας.
Έστω Α το ενδεχόμενο ο μαθητής που επιλέχθηκε είναι αγόρι και Κ το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι.
Για τους μαθητές της ομάδας γνωρίζουμε ακόμη ότι:
i. Η μέση τιμή της ηλικίας όλων των μαθητών είναι 16 χρόνια.
ii. Η μέση τιμή της ηλικίας των μ αγοριών είναι 16 + 2x χρόνια, ενώ η μέση τιμή της ηλικίας των ν κοριτσιών είναι $16-\ln(ex)$ χρόνια.
iii. Το x είναι πραγματικός αριθμός με 0 < x < e, για τον οποίο η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι η μέγιστη.
α. δείξτε ότι ο λόγος των αγοριών προς τα κορίτσια, είναι $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\ln(ex)}{2x}$.
β. Δείξτε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α εκφράζεται από την συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln(ex)}{2x+\ln(ex)}$
γ. Υπολογίστε τον αριθμό x.
δ. Δείξτε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου Κ είναι διπλάσια της πιθανότητας του ενδεχομένου Α.

Άσκηση 30 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+(1-x)^4$, $0\le x\le 1$
i) Να δείξετε ότι $f'(x)=4(2x-1)(x^2-x+1)$
ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της *f*.
Β. Αν Α ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι $P^4(A)+P^4(A')\ge\frac{1}{8}$

Άσκηση 31 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Από τους μαθητές ενός Λυκείου
- Το 20% αυτών συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.
- Το 85% δεν συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ε.Ε.Φ
- Και το 8% συμμετέχει και στους δύο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
i. Γ: Ο μαθητής να μη συμμετέχει σε κανένα από τους δύο διαγωνισμούς.
ii. Δ: Ο μαθητής να συμμετέχει σ' ένα μόνο διαγωνισμό.
iii. Ε: Ο μαθητής να συμμετέχει μόνο στο διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε.
iv. Ζ: Ο μαθητής να συμμετέχει το πολύ σ' ένα διαγωνισμό.

Πηγή: Από φυλλάδιο Δ. Αργυράκη & Γ.Κουτσανδρέα

Άσκηση 32 (Προτάθηκε από Απόστολο Τιντινίδη)

Οι 14 από τους 15 μαθητές ενός τμήματος έγραψαν τους παρακάτω βαθμούς σε ένα test:

11, 17, 13, 11, 18, 19, 20, 13, 17, 10, 12, 17, 13 και 19.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος των παραπάνω βαθμών είναι ίση με τη μέση τιμή τους.

1) να βρεθεί ο 15ος βαθμός αν γνωρίζετε ότι είναι ακέραιος.

2) να βρεθεί η διακύμανση των παραπάνω βαθμών

3) Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και έστω τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής έγραψε τουλάχιστον 17
Β: ο μαθητής έγραψε τουλάχιστον 13
i) να υπολογισθούν οι πιθανότητες: Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Β -Α) και Ρ(Α' - Β)
ii) να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της πιθανότητας του ενδεχομένου Γ, όταν: $A \cup \Gamma = B$

Άσκηση 33 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4kx + 2001,\ x \in R$ και $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{f''(x)}{4x^2 - 1}$

α. Να δείξετε ότι k= 3
β. Να βρείτε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
γ. Αν $[P(A) = \frac{1}{2}$ είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α={0,1,2,5} ενός δειγματικού χώρου Ω, που περιέχει το στοιχειώδης ενδεχόμενο {0} και όλα τα δυνατά αθροίσματα των στοιχείων του Α.

Να υπολογίσετε τα $\lambda, \mu \in R$ όταν $P(\omega_i) = \begin{cases} \lambda, & \omega_i \in \mathrm{A} \\ \mu, & \omega_i \notin \mathrm{A} \end{cases},\quad \omega_i \in \Omega$

δ. Για $\lambda = \mu = \frac{1}{8}$, θεωρούμε το δείγμα των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_8$ με τιμές τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω. Θεωρούμε επίσης το δείγμα των παρατηρήσεων $y_i = 2\lambda x_i - \mu,\ i = 1, 2, ..., 8$. Να κρίνεται τα δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

Άσκηση 34 (Προτάθηκε από Βασίλειο Κακαβά)

Έστω Α, Β, Γ είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω έτσι ώστε $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma=\Omega$ με Α, Γ ασυμβίβαστα. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν τα Β, Γ ταυτόχρονα είναι 0,2, η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν τα Α, Β ταυτόχρονα είναι 0,4, τα $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'$, $\mathrm{B}'\cap\Gamma$ ισοπίθανα και $P(\mathrm{A}')=0,5$ τότε:

1) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β, Γ
2) Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Β
3) Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Α ή μόνο το Β.

Άσκηση 35 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Δίνεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,.....,\omega_n\}$.

α. Αν το δείγμα $P(\omega_1),P(\omega_2),.......,P(\omega_n)$ έχει μέση τιμή $\frac{1}{9}$, να δείξετε ότι n=9.

β. Αν το εύρος του δείγματος $P(\omega_1),P(\omega_2),.......,P(\omega_9)$ είναι 0,01, δείξτε ότι τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα.

γ. Αποδείξτε ότι η διάμεσος του δείγματος $P(\omega_1),P(\omega_2),.......,P(\omega_9)$ δε μπορεί να ισούται με 0,51.

Άσκηση 36 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη)

Έστω A,B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με $A, B\neq\varnothing$. Δίνεται επίσης και η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(A\cap B)\cdot x$ με $x\in R$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για $x=P(A-B)$
β. Αν $A\subseteq B$, να αποδείξετε ότι $f(P(A))=2f(0)$
γ. Αν $B\subseteq A$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $P(A-B)=P(A)-P(B)$
ii. Ο τύπος της f γράφεται $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(P(A)-P(B))x+\frac{1}{2}P^2(A)$
iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Πηγή: Αλέξανδρος Τραγανίτης

Άσκηση 37 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

1. Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P^2(B)-\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)P(B)+\frac{P(A)}{2} \le 0$ τότε να δείξετε ότι $P(A)=P(B)$ ή $P(B)\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

2. Έστω Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $B \subseteq A$. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $2P(A)\left[2P(A)-P(B)\right] \ge P^2(A)+P^2(B)$

3. Αν Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A)-2P(A')+3P(B) \ge 2P(A\cup B)+2P(A\cap B)$, να δείξετε ότι $P(A)=P(B)$.

Πηγή: Μάμαλης, Μιχαήλογλου, Τόλης

Άσκηση 38 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,….,ν} του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Αν ν είναι η μέση βαθμολογία ενος μαθητή στα 5 μαθήματα, στα οποία οι βαθμοί ήταν 12,10,16,18,14 και οι συντελεστές βαρύτητας 2,3,1,1,3 αντίστοιχα.

Α. Να βρείτε το Ν(Ω).

Β.Έστω τα ενδεχόμενα A={$a \in \Omega$, a *άρτιος*} και $\mathrm{B}=\left\{a \in \Omega,\ \text{και}\ a\ \text{ρίζα της εξίσωσης}\ x^3-5x^2+4x=0\right\}$.

i. Να βρεθούν οι Ρ(A) και Ρ(B)

ii. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα $A\cap B$, $A\cup B$ καθώς και οι πιθανότητες αυτών.

Άσκηση 39 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω={-3,-2,-1,0,1,2,3} και οι πιθανότητες $P(k)=\frac{2|k|-k}{100}$, $k\in\Omega$, $k\neq 0$.

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων του Ω.

β. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: " Η εξίσωση $x^2-4kx+12=0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες" γ. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Β: "Η συνάρτηση $f(x)=3x^4-6x^2+k$ παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=k$ "

δ. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A\cap B,\ \ A\cup B$.

Άσκηση 40 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσίποδα)

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω = { 1,2,3,4,5}. Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω ισχύει ότι $P(k)=ak+\beta,\ k\in\Omega$. Θεωρούμε επίσης το ενδεχόμενο $A=\left\{k\in\Omega\,/\,\textit{οι παρατηρήσεις}\ 1,2,\kappa,2\kappa+4,2\kappa+3\ \textit{να έχουν}\ CV<\frac{\sqrt{14}}{5}\right\}$ για το οποίο ισχύει $P(A)=\frac{3}{10}$.

Α. Να βρεθούν τα $a,\beta\in R$.

Β. Θεωρούμε το ενδεχόμενο:

$B=\left\{k\in\Omega\,/\,\textit{το ελάχιστο της}\ f(x)=x^2-2\ln x+k^2-5k\ \textit{είναι μεγαλύτερο του}\ -5\right\}$

i. Να βρείτε την πιθανότητα P(B)

ii. Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της $g(x)=P\big((A-B)\cup(B-A)\big)x^3+\frac{x^2}{P(A\cup B')}-7x+1$ που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 135°

<u>Πηγή – Απαντήσεις</u>

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=21476