

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ

ΣΥΛΛΟΓΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Άσκηση 1 (Προτάθηκε από Χρήστο Κανάβη)

Έστω $CV^2 = 0.4$ όπου CV ο συντελεστής μεταβολής, και η τοπική απόκλιση $s = 0.2$ ενός δείγματος που έχει την ίδια μέση τιμή με το δείγμα A με παρατηρήσεις τις $1, 3, -2, \alpha, -1$, όπου α ακέραιος.

A) Αν η διάμεσος δ του δείγματος A είναι αρνητική, να βρεθεί το εύρος R του δείγματος.

B) Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος που προκύπτει από το αρχικό δείγμα A προσθέτοντας σε κάθε παρατήρηση τον αριθμό \bar{x} και ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος που προκύπτει από το αρχικό δείγμα πολλαπλασιάζοντας κάθε παρατήρηση με τον αριθμό \bar{x} , όπου \bar{x} η μέση τιμή του αρχικού δείγματος για την περίπτωση που $\bar{x} < 0$. Ποιο από τα δύο αυτά δείγματα είναι περισσότερο ομοιογενές;

Άσκηση 2 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Στον ελλιπή πίνακα που ακολουθεί, παρουσιάζεται η κατανομή συχνοτήτων (απόλυτων, σχετικών κ.τ.λ) των τιμών της θερμοκρασίας σε C , ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους, που σημειώθηκαν κατά την χειμερινή περίοδο σε n πλήθους ημέρες στην πόλη της Αθήνας.

Θερμοκρασία σε Κελσίου	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
.... - 4	v_1		
... -	v_2	25	
.... -	$4v_1$		75
.... -	v_4		90
.... - 20	v_1		
Σύνολο	$4n$	100	-

Να βρείτε:

- Τα άκρα των κλάσεων
- Τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$
- Τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$



Αν $v_1 = f(x_0)$, όπου $f(x_0)$ η θέση του ολικού μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

δ. Τότε να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των (απόλυτων) συχνοτήτων.

Για την τιμή v_1 που βρήκατε να υπολογίσετε:

ε. i. Το πλήθος των ημερών της χειμερινής περιόδου που σημειώθηκαν θερμοκρασίες από 9°C έως 12°C

ε. ii. Το ποσοστό των ημερών της χειμερινής περιόδου, που σημειώθηκαν θερμοκρασίες πάνω από 11°C .

(Να θεωρήσετε ότι οι τιμές της θερμοκρασίας κατανέμονται ομοιόμορφα)

Άσκηση 3 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4s \cdot x^2 - 2\bar{x} \cdot x + 13$, $x \in \mathbb{R}$ όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τοπική απόκλιση ενός δείγματος μεγέθους n . Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2009$, τότε:

α) Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

γ) Αν η f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:

i) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τοπική απόκλιση του δείγματος.

ii) Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια;

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο A .

Άσκηση 4 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + 2a^2x + 3a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Αν οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία x_1, x_2 είναι παράλληλες στον x' , τότε:

α. Να βρείτε τα x_1, x_2 .



β. Να υπολογίσετε την μέση τιμή των αριθμών $f(0)$, $f''(x_1)$ και $f''(x_2)$.

γ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των $f(0)$, $f''(x_1)$, $f''(x_2)$ και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθένα από αυτούς τους όρους κατά 2, να βρείτε την τιμή του $a > 0$ ώστε $3CV' = CV$ καθώς και για την τιμή του a που βρήκατε να κρίνετε ποιο δείγμα είναι πιο ομοιογενές.

Πηγή: Δ. Γεωργακίλας (Εκδόσεις Τομή).

Άσκηση 5 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Ο βαθμός πρόσβασης του απολυτηρίου 50 μαθητών της Γ' λυκείου αναγράφεται στον παρακάτω ελλιπή πίνακα.

Αν είναι γνωστό ότι στο κυκλικό διάγραμμα το τόξο που αντιστοιχεί στην τρίτη κλάση είναι 144° και $v_2 = 4v_3$, τότε:

κλάσεις	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[10,)$	5		
$[,)$			
$[,)$			
$[,)$		20	
$[, 20)$			
Σύνολο	$v=50$		-

α. Να βρείτε το πλάτος κάθε κλάσης.

β. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

γ. Να βρείτε τη διάμεσο

δ. Αν από τους παραπάνω μαθητές οι ανώτατες σχολές πάρουν μόνο το 36%, να βρείτε τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί.

Άσκηση 6 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\bar{x}}{3} \cdot x^3 - 12s \cdot x^2 + \bar{x} \cdot x + s$, $x \in \mathbb{R}$, και \bar{x} , s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος $2n$, θετικών παρατηρήσεων με $n \in \mathbb{N}^*$.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν παρουσιάζει ακρότατα, να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

β) Αν η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,5)$ της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα x' ,

τότε να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

γ) Αν $\bar{x} = 12$ και $s = 1$ τότε:

i. Να βρεθεί μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{2n}^2$, όπου x_1, x_2, \dots, x_{2n} οι παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος.

ii. Αν στις μισές παρατηρήσεις προσθέσουμε το 4, να βρεθεί η μέση τιμή του νέου δείγματος.

Άσκηση 7 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Οι δείκτες νοημοσύνης των μαθητών ενός λυκείου ακολουθούν την κανονική κατανομή. Ο ελάχιστος δείκτης του 16% των «εξυπνότερων μαθητών» είναι 108 και ο μέγιστος δείκτης του 16% των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι 84.

i. Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

ii. Να βρείτε το εύρος και την διάμεσο του δείγματος.

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνης τουλάχιστον 132.

iv. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές και αν όχι να βρεθεί η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή του c κατά την οποία πρέπει να αυξηθεί ο δείκτης νοημοσύνης κάθε μαθητή, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές

v. Αν 163 μαθητές έχουν δείκτη μεταξύ 72 και 108, να βρεθεί πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Άσκηση 8 (Προτάθηκε από Χρήστο Τσιφάκη)

10 μαθητές ενός τμήματος της Γ' λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών Γενικής, πήραν τις παρακάτω βαθμολογίες 12, 18, 16, 14, 15, 18, 13, 14, 17, 13.

A1) Να βρείτε τη μέση βαθμολογία και τη μεταβλητότητα των βαθμών.

A2) Εξετάστε αν τα γραπτά παρουσιάζουν ομοιογένεια στη βαθμολογία.

B. Ο καθηγητής αποφάσισε να "βοηθήσει" τους μαθητές γι' αυτό σκέφτηκε τα εξής:

i) να αυξήσει όλες τις βαθμολογίες κατά 2 μονάδες στο κάθε ένα γραπτό ή

ii) να αυξήσει τη βαθμολογία του κάθε γραπτού κατά 10%

Πως θα επηρεάσουν τα πιο πάνω σκεπτικά i) ή ii) τη μέση βαθμολογία;

Δίνεται $\sqrt{4,02} \approx 2,05$.

Άσκηση 9 (Προτάθηκε από Χρήστο Τσιφάκη)

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής X των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες Ευρώ) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

A(20,0), B(40,5), Γ(60,10), Δ(80,20), E(100,30), Z(120, v_5), H(140,10), Θ (160,0).

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $x=100$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

α) Ν' αποδείξετε ότι $v_5 = 25$.

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής.

γ) Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της κατανομής.

δ) Αν σαν «όριο φτώχειας» θεωρήσουμε τον μισθό των 7200 ευρώ, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις % των φτωχών του δείγματος.

ε) Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την συμμετρία της.

Άσκηση 10 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Μελετούμε τους 80 μαθητές της Γ' τάξης ενός λυκείου ως προς το βάρος τους, έτσι :

- Ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις σε τέσσερις ίσες κλάσεις.
- Η κεντρική τιμή της πρώτης κλάσης είναι 60 κιλά και το δεξιό άκρο της τρίτης κλάσης είναι 80 κιλά.



- Οι συχνότητες της πρώτης και της τέταρτης κλάσης είναι ίσες και έχουν άθροισμα την συχνότητα της τρίτης κλάσης.
 - Η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι διπλάσια της συχνότητας της τρίτης κλάσης
- Na βρείτε τις κλάσεις
 - Na συμπληρώσετε τον πίνακα

κλάσεις	κεντρο κλασης x_i	n_i	N_i	$n_i x_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
Συνολο	-	80				-

- Na βρείτε την μέση τιμή.
- Na σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων
- Na υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος
- Na βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον 72 κιλά.
- An κατά την διάρκεια των χριστουγεννιάτικων διακοπών, κάθε ένα απο τα 32 αγόρια πάρει 1,5 κιλό και κάθε κορίτσι 1 κιλό, ποια θα είναι η νέα μέση τιμή.

Άσκηση 11 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

A. An t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι τιμές των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X , να αποδείξετε ότι $S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

B. Σε μια πόλη κατά τις απολυτήριες εξετάσεις στο μάθημα της ιστορίας η βαθμολογία t_1, t_2, \dots, t_n των μαθητών ήταν περίπου κανονική κατανομή. Ο μέσος όρος των τετραγώνων των βαθμών ήταν 148 και ο συντελεστής μεταβλητότητας $\frac{1}{6}$.

- Na βρείτε τον μέσο όρο των βαθμών, την τυπική απόκλιση και την διάμεσο.
- An 10 μαθητές είχαν βαθμολογία πάνω από 16, να βρείτε πόσοι μαθητές συμμετείχαν στις εξετάσεις.

Άσκηση 12 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Δίνεται το δείγμα $5, 6, 7, a, b$ με $a < b$. Αν ισχύουν $\bar{x} = 6$ και $CV = \frac{50\sqrt{2}}{3}\%$,

- Να βρείτε την τυπική απόκλιση του δείγματος
- Να δείξετε ότι $a + b = 12$
- Να βρείτε τους a, b .
- Για $a = 4, b = 8$ να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος που προκύπτει αν διαιρέσουμε κάθε τιμή του δείγματος με το $\sqrt{2}$.

Άσκηση 13 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών ως προς το βαθμό που πήραν στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας στις Πανελλήνιες Εξετάσεις και διαπιστώσαμε ότι :

- Κάτω από 20 πήραν 5 μαθητές
- Κάτω από 40 πήραν 13 μαθητές
- Από 40 και πάνω πήρε το 48% των μαθητών
- Κάτω από 60 πήρε το 76% των μαθητών
- Ενώ από 80 και πάνω πήρε το 8% των μαθητών .

βαθμοι	κεντρο κλασης χ_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$\nu_i x_i$	$\nu_i (x_i - \bar{x})^2$
0-20							
20-40							
40-60							
60-80							
80-100							
Συνολο	-						

- Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα
- Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό από 50 μέχρι και 70.

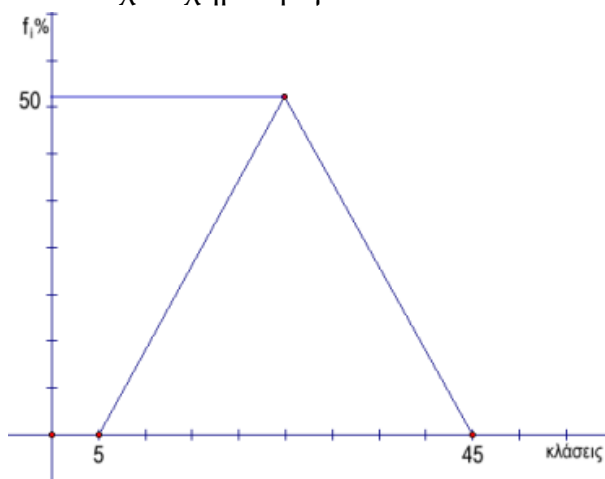


iii. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών και την τυπική απόκλιση.

iv. Είναι ομοιογενές το δείγμα;

Άσκηση 14 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Ένα δείγμα ομαδοποιήθηκε σε k κλάσεις, ίσου πλάτους c . Δίνεται το πολύγωνο $f_i\%$ το οποίο έχει σχήμα τριγώνου.



α) Να εκφράσετε το c συναρτήσει του k .

β) Να βρείτε τα c, k .

γ) Αν $f_i\% = 25$, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα $f_i\%$.

Άσκηση 15 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Ρωτήθηκε ένα δείγμα n οικογενειών σχετικά με τον αριθμό των παιδιών που έχουν. Από τις απαντήσεις τους συντάχθηκε ο πίνακας των αθροιστικών συχνοτήτων

αριθμος παιδιων χ_i	αριθμος οικογενειων ν_i	N_i
1	ν_1	x
2	ν_2	$3x-5$
3	ν_3	$3x+8$
4	ν_4	$4x+7$
5	ν_5	$5x$

α. Να εκφράσετε συναρτήσει του x τις συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$.



Αν οι αθροιστικές συχνότητες N_i έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 34$, να βρείτε:

β. Την τιμή του x .

γ. Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ τρία παιδιά και πόσες έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά.

δ. Τη μέση τιμή \bar{x} και την διάμεσο δ του αριθμού των παιδιών των οικογενειών.

Πηγή: Α. Κανάκης – Γ. Μαυρίδης (Εκδόσεις Μαυρίδη)

Άσκηση 16 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη).

Έστω μεταβλητή X με παρατηρήσεις t_1, t_2, \dots, t_n , μέση τιμή $\bar{x} \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, και η

$$\text{συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot (t_1 + t_2 + \dots + t_n) - 2\bar{x} \cdot n}{x^2 - 4}, & 0 < x \neq 2 \\ \frac{a\bar{x} \cdot n}{2}, & x = 2 \end{cases}$$

α) Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, να αποδείξετε ότι $a = \frac{1}{2}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(3,20)$, να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^n t_i = 100$.

γ) Αν $\sum_{i=1}^n t_i \cdot f_i = 1$, όπου f_i οι σχετικές συχνότητες των παρατηρήσεων, να βρεθεί το πλήθος n του δείγματος.

Άσκηση 17 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Οι σημερινές ηλικίες των καθηγητών του Μαθηματικού τμήματος Ιωαννίνων έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_1 = 0,08$, ενώ πριν 25 χρόνια ο συντελεστής μεταβολής των ηλικιών τους ήταν $CV_2 = 0,16$.

Θεωρώντας ότι στο πέρασμα των ετών δεν υπήρχαν μεταβολές στο διδακτικό προσωπικό:

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της σημερινής τους ηλικίας.

β) Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες των καθηγητών είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια;



γ) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών είναι 75480, να βρεθεί πόσοι είναι οι καθηγητές του τμήματος.

δ) Αν συνταξιοδοτηθεί ένας εκ των καθηγητών και στη θέση του προσληφθεί ένας καθηγητής 30 χρόνια νεότερος, τότε:

i) Να βρεθεί η νέα μέση τιμή των ηλικιών.

ii) Να βρεθεί το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών μετά την πρόσληψη του καθηγητή, αν η διακύμανση που προκύπτει είναι 37

iii) Με δεδομένο το προηγούμενο ερώτημα, να εξετάσετε το νέο δείγμα που προκύπτει ως προς την ομοιογένεια.

Άσκηση 18 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Οι χρόνοι σε min που χρειάζονται οι μαθητές μιας γειτονιάς να πάνε στο σχολείο τους έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους με αντίστοιχες συχνότητες 6, 10, 7 και 7.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6(x_1 - x)^2 + 10(x_2 - x)^2 + 7(x_3 - x)^2 + 7(x_4 - x)^2$, όπου x_1, x_2, x_3, x_4 τα κέντρα των αντίστοιχων κλάσεων.

Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 7$ με τιμή $f(7) = 134$.

i. Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c=2$

ii. Να βρείτε τις συχνότητες f_i

iii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

iv. Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Πηγή: Από φυλλάδιο Δ. Αργυράκη – Γ. Κουτσανδρέα

Άσκηση 19 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Ένα εργοστάσιο έχει n στελέχη και $4n$ εργάτες με μισθούς $x_i, i = 1, 2, \dots, 5n$ σε εκατοντάδες ευρώ, όπου n θετικός φυσικός.

Ο μηνιαίος μισθός κάθε εργάτη είναι 750 ευρώ και κάθε στελέχους 1100 ευρώ

i. Να βρείτε το μέσο μηνιαίο μισθό όλων των υπαλλήλων.



ii. Υποθέτουμε ότι η τυπική απόκλιση όλων των μισθών είναι 140 ευρώ και $\sum_{i=1}^{5n} t_i^2 = 34.600.000$ ευρώ. Να αποδείξετε ότι το εργοστάσιο απασχολεί 50 εργαζόμενους.

iii. Το εργοστάσιο αποφασίζει να αυξήσει τις μηνιαίες αποδοχές των εργατών κατά α ευρώ και να μειώσει τις μηνιαίες αποδοχές των στελεχών κατά β ευρώ, ώστε το μέσο μισθολόγιο να μην υπερβαίνει τα 840 ευρώ. Να αποδείξετε ότι $4\alpha - \beta \leq 100$.

Άσκηση 20 (Προτάθηκε από pito)

Δίνονται 10 παρατηρήσεις, από τις οποίες οι 5 είναι ίσες με 3 και οι υπόλοιπες είναι ίσες με 1 ή 6. Έστω k το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι ίσες με 6.

α) Να εκφράσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των 10 παρατηρήσεων συναρτήσει του k .

β) Να βρείτε για ποια τιμή του k η διακύμανση γίνεται μέγιστη.

γ) Έστω ότι $k=3$. Συμπληρώνουμε τις αρχικές 10 παρατηρήσεις με άλλες δύο θετικές και οι 12 παρατηρήσεις έχουν διακύμανση $s^2 = 16$ και συντελεστή μεταβολής $CV=0,8$. Να βρείτε:

i) τις δύο παρατηρήσεις που συμπληρώσαμε,

ii) την μικρότερη τιμή του $c > 0$ που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις 12 παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

Πηγή: Β. Παπαδάκης (Εκδόσεις Σαββάλα)

Άσκηση 21 (Προτάθηκε από Γιώργο Απόκη)

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Για τις αθροιστικές

συχνότητες ισχύει $N_i = \frac{3i^2 + 7i}{2}$, $i = 1, \dots, k$.

α) Να βρεθούν οι (απόλυτες) συχνότητες n_i ως συνάρτηση του i , ($i = 1, \dots, k$)

β) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι $n=55$, να βρείτε το k .

γ) Για $k=5$, να υπολογίσετε τις συχνότητες f_i , $F_i\%$, ($i = 1, \dots, k$).



Άσκηση 22 (Προτάθηκε από Περικλή Παντούλα)

Τα κέρδη (σε ευρώ) μιας αλυσίδας καταστημάτων ειδών διατροφής ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το 84 τοις εκατό των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ, ενώ το 97,5 τοις εκατό των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από 600 ευρώ.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο των κερδών.

β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να προσεγγίσετε το εύρος των κερδών.

γ) Μπορεί το σύνολο των καταστημάτων της αλυσίδας να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη; Αν το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, κατά ποια σταθερή ποσότητα πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων για να γίνει το δείγμα ομοιογενές;

δ) Αν μια μέρα τα κέρδη όλων των καταστημάτων μειωθούν κατά 20 τοις εκατό, πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής;

Άσκηση 23 (Προτάθηκε από Ηλία Καμπέλη)

Τα ψυγεία μιας εταιρείας συντήρησης τροφίμων είναι κατανεμημένα σε 4 κλάσεις σύμφωνα με την θερμοκρασία τους X ($^{\circ}\text{C}$) η οποία κυμαίνεται από -4°C έως 4°C . Αν δεύτερη κλάση έχει 3πλάσιο αριθμό ψυγείων από την πρώτη και η τέταρτη 5πλάσιο της πρώτης τότε:

α) Να παρασταθούν τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων και να δειχθεί ότι η μέση της θερμοκρασίας των ψυγείων είναι $\bar{x} = 1^{\circ}\text{C}$.

β) Έστω ότι η τρίτη κλάση έχει ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη.

i) Να υπολογίσετε την διάμεσο θερμοκρασία.

ii) Αν γνωρίζουμε ότι η θερμοκρασία 34 ψυγείων είναι μικρότερη των $0,5^{\circ}\text{C}$, να βρεθεί ο αριθμός των ψυγείων που κατέχει η εταιρεία.



Άσκηση 24 (Προτάθηκε από pito)

Έστω x_1, x_2, \dots, x_n θετικές παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = n \cdot x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) x + \sum_{i=1}^n x_i^2$ η οποία έχει ελάχιστο το $25n$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \bar{x}$.

β) Να βρείτε τη τυπική απόκλιση s .

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $\omega_i = f'(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

δ) Θεωρούμε τις παρατηρήσεις $y_i = 3x_i + 100$, $i = 1, 2, \dots, n$, οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_y = 0,06$ και ισχύει $\sum_{i=1}^n (y_i - 250)^2 = 22.500$.

i) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n είναι ομοιογενές.

ii) Να βρείτε το πλήθος n των παρατηρήσεων.

iii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον yy' .

Πηγή: (Βασίλης Παπαδάκης, εκδόσεις Σαββάλας)

Άσκηση 25 (Προτάθηκε από Χρήστο Τσιφάκη)

Έστω t_1, t_2, \dots, t_n με $n \in \mathbb{N}^*$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος με διασπορά $s^2 = 64$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3} \left[(t_1 - x)^3 + (t_2 - x)^3 + \dots + (t_n - x)^3 \right]$.

α) Αν $f'(\bar{x}) = 6400$ να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

β) Αν $f''(\bar{x}) = 16000$ να βρείτε την μέση τιμή του δείγματος.

γ) Να δειχθεί ότι καμία από τις παρατηρήσεις του δείγματος t_1, t_2, \dots, t_n δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

Άσκηση 26 (Προτάθηκε από Χρήστο Τσιφάκη)

Εστω το δείγμα x_1, x_2, \dots, x_n με μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και συντελεστή μεταβολής $CV = 25\%$.

Να αποδειχθεί ότι:

i) η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s = 1$.

ii) το κλάσμα $A = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$ είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος n του δείγματος.

iii) υπάρχει παρατήρηση x_k που βρίσκεται μεταξύ του 3 και 5;

Άσκηση 27 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιποδα)

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας, στον οποίο οι παρατηρήσεις είναι ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους.

κλάσεις	κεντρο κλάσης x_i	ν_i	f_i	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$	$\nu_i(x_i - \bar{x})^2$
(.....)		12					
5 ...)			0,18				
(.....)		15					
(.....)		10		55			
(.....)	12				75		
(.....)				83			
(.....)							
Συνολο	-			-	-		

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με 2.

β. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

δ. Να βρείτε την διάμεσο

ε. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον ίση με 12.

στ. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή από 6 έως 12.



Άσκηση 28 (Προτάθηκε από apotin)

Έστω $4, -3, -x, -2, x^2, 2$, με $x \in (0,1)$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος.

A) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή του δείγματος γίνεται ελάχιστη, όταν και η διάμεσος γίνεται ελάχιστη.

B) Για την τιμή $x = x_0$ όπου x_0 το σημείο που η μέση τιμή γίνεται ελάχιστη, να βρείτε:

- 1) τις παρατηρήσεις του δείγματος
- 2) τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος
- 3) την τυπική απόκλιση.

Πηγή: (Γ. & Μ. Λασκαριδής, Α. Μουνδρέας, Μ. Πατρινός)

Άσκηση 29 (Προτάθηκε από Δημήτρη Κατσιπόδα)

Σε 10 καταστήματα στην επαρχία συναντήσαμε τις παρακάτω τιμές πωλήσεις ενός προϊόντος (σε λεπτά) $74,78,76,70,80,74,76,78,72,72$.

Να βρείτε τα παρακάτω μέτρα για το παραπάνω δείγμα:

- α. Μέση τιμή
- β. Διάμεσο
- γ. Εύρος
- δ. διακύμανση
- ε. Να κρίνετε αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

Αν για τα ίδια προϊόντα, από έρευνα σε 15 καταστήματα της Αθήνας, οι τιμές πώλησης (σε λεπτά) βρέθηκε ότι έχουν μέση τιμή 70.

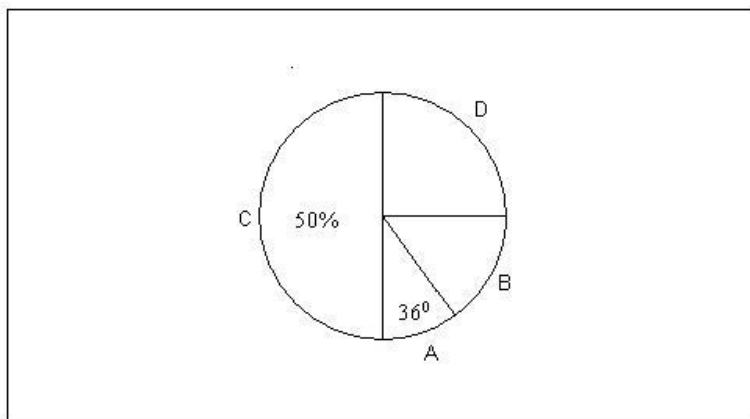
Να βρείτε:

στ. Τη μέση τιμή πώλησης του προϊόντος για όλα τα καταστήματα της Αθήνας και της επαρχίας.

ζ. Ποια πρέπει να είναι η μεγαλύτερη τιμή της τυπικής απόκλισης για την τιμή πώλησης του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα, ώστε το συνολικό δείγμα να παραμένει ομοιογενές.

**Άσκηση 30 (Προτάθηκε από Κανάβη Χρήστο)**

Σε μια γραπτή εξέταση αγγλικών οι βαθμοί επιτυχίας είναι A,B,C ενώ D ο βαθμός αποτυχίας. Τα αποτελέσματα ενός δείγματος 500 μαθητών που εξετάστηκαν γραπτά δίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί:

βαθμος εξετασης	Αριθμος μαθητων	f_i	α_i	F_i
A				
B		0.15		
C				
D				
Συνολο				

B. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Γ. Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έχουν επιτύχει στις εξετάσεις.

Δ. Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έχουν αποτύχει στις εξετάσεις.

Ε. Να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών και το ποσοστό που έχει πάρει Β ή C.

Πηγή - Αναζητήσεις

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=21166>